Roll No. ....

Y– 2531

B. Sc. B. Ed. (Second Semester)

EXAMINATION, June 2021

MATHEMATICS

Time : Three Hours

Maximum Marks : 125 *Minimum Pass Marks : 50*

नोट– **सभी** प्रश्न हल कीजिए।

Attempt *all* questions.

1. किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए।

Attempt any *five* parts—

(i) $\cos^4 x$ का nवाँ अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

Find nth differential coefficient of $\cos^4 x$.

(ii) मेक्लारिन प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए—

$$\log \sec x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \ldots$$

Apply Maclaurin's theorem to prove that

$$\log \sec x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \ldots$$

(iii) यदि $y = \cos x \, \cos 2x \, \cos 3x$ तो y_n का मान ज्ञात करो।

If $y = \cos x \, \cos 2x \, \cos 3x$ then find value y_n.

(iv) $\iint_R xy \, dx \, dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ समाकल क्षेत्र R वृत $x^2 + y^2 = a^2$ का धन चतुर्थांस है।

Find the value of $\iint_R xy \, dx \, dy$ where the region of integration R is positive quadrant of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

(v) मान ज्ञात कीजिए—

$$\int \sin^7 x \cos^3 x \, dx$$

Evaluate

$$\int \sin^7 x \cos^3 x \, dx$$

(vi) यदि $f(x,y)=2x^2-xy+2y^2$ तो $f_x(1,2)$ और $f_y(1,2)$ ज्ञात कीजिए।

If $f(x,y)=2x^2-xy+2y^2$, find $f_x(1,2)$ and $f_y(1,2)$.

(vii) समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$ को इस प्रकार परिवर्तित कीजिए कि चर y, x के स्थान पर स्वतन्त्र चर माना जा सके।

Change the equation $\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$ such that y can be assumed as independent variable in place of x.

(viii) हल कीजिए—

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^2$$

Solve— $$x\frac{dy}{dx}-2y=x^2$$

(ix) हल कीजिए— $p^2-5p+6=0$

Solve— $p^2-5p+6=0$

(x) यदि $\hat{r}$ एक इकाई सदिश है तो दर्शाइये—

$$\left|\hat{r}\times\frac{d\hat{r}}{dt}\right|=\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right|$$

If $\hat{r}$ be a unit vector then show that

$$\left|\hat{r}\times\frac{d\hat{r}}{dt}\right|=\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right|$$

नोट—कोई **दो** भाग हल कीजिए।

Attempt any *two* parts.

2(a). यदि $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$$x^2y_2+xy_1+y=0$$

तथा $$x^2y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2+1)y_n=0$$

If $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$, then show that

$$x^2y_2+xy_1+y=0$$

and

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$

(b) सिद्ध करो कि—

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{2x^3}{3!} - \frac{2^2 x^4}{4!} - \frac{2^2 x^5}{5!} - \ldots$$

Prove that—

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{2x^3}{3!} - \frac{2^2 x^4}{4!} - \frac{2^2 x^5}{5!} - \ldots$$

(c) वक्र $x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 + 3xy + 3y^2 + x + 1 = 0$ की सभी अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात करो।

Find all the asymptotes of the curve—

$$x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 + 3xy + 3y^2 + x + 1 = 0$$

3(a). सिद्ध कीजिए कि—

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

Prove that

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

(b) यदि $x^x y^y z^z = c$, तो दर्शाइये कि $x = y = z$ पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex^{-1})$$

If $x^x y^y z^z = c$, then show that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex^{-1})$$

when $x = y = z$

(c) यदि $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$J(u_1, u_2, u_3) = 4$

If $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$

then prove that $J(u_1, u_2, u_3) = 4$

4(a). अवकल समीकरण $(1+y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ को हल कीजिए।

Solve $(1+y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$

(b) हल कीजिए—

$$p^2 + 2py\cot x - y^2 = 0$$

Solve—

$$p^2 + 2py\cot x - y^2 = 0$$

(c) निम्नलिखित समीकरण का व्यापक एवं विचित्र हल ज्ञात करो $y = px - p^2$

Find the general and singular solution of the equation $y = px - p^2$

5. (a) हल कीजिए—

$$(D^3 + 3D^2 + 2D)\, y = x^2$$

Solve—

$$(D^3 + 3D^2 + 2D)\, y = x^2$$

(b) अवकल समीकरण $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 \log x$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation—

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 \log x$$

(c) प्राचल विचरण की विधि से हल कीजिए—

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

Solve by using the method of variation of parameters :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

6. (a) दिया है कि–

$$r(t)=\begin{cases}2i-J+2k, \text{ जब } t=2\\ 4i-2J+3k, \text{ जब } t=3\end{cases}$$

तो सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_2^3\left(r.\frac{dr}{dt}\right)dt=10$$

Given that

$$r(t)=\begin{cases}2i-J+2k, \text{ at } t=2\\ 4i-2J+3k, \text{ at } t=3\end{cases}$$

then prove that

$$\int_2^3\left(r.\frac{dr}{dt}\right)dt=10$$

(b) दर्शाइये कि–

$$\nabla^2\left(r^n\vec{r}\right)=n(n+3)r^{n-2}\vec{r}$$

Show that—

$$\nabla^2\left(r^n\vec{r}\right)=n(n+3)r^{n-2}\vec{r}$$

(c) $\iint_S \mathrm{F}.\hat{n}\,d\mathrm{S}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ

$\mathrm{F}=4xzi-y^2j+yzk$ तथा $x=0, x=a$ $y=0, y=a, z=0$ तथा $z=a$ से बन्धित घन का पृष्ठ है।

Evaluate $\iint_S \mathrm{F}.\hat{n}\,d\mathrm{S}$, where $\mathrm{F} = 4xzi - y^2j + yzk$ and S is the surface of the cube bounded by the planes $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$.